2. Ganzrationale Funktionen
2.4 Nullstellen bei Funktionen 3. Grades

Funktionen 3. Grades ohne Absolutglied

Bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades ohne Absolutglied beginnt die Nullstellenberechnung mit dem Ausklammern von x. Dadurch erhält die Funktionsgleichung eine andere Struktur. Aus Summen und Differenzen entsteht ein Produkt.

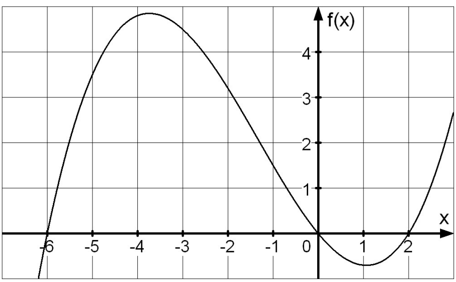
$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}4x^2 - 1{,}2x \xrightarrow{\text{ausklammern}} f(x) = x \cdot (0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2)$

Summe / Differenz ausklammern Produkt

Wird für f(x) null eingesetzt, entsteht $0 = x \cdot (0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2)$.

Die erste Lösung dieser Gleichung heißt $x_1 = 0$, denn wenn das ausgeklammerte x den Wert null annimmt, ergibt das Produkt "null mal Klammer" in jedem Falle null. Allgemein gilt: Bei Funktionen 3. Grades ohne Absolutglied existiert immer eine Nullstelle bei x = 0.

Die Gleichung $0 = x \cdot (0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2)$ hat noch andere Lösungen, denn wenn der Term *in* der Klammer null ergibt, entsteht aus "x mal null" das Produkt null. Also ergeben sich weitere Nullstellen der Funktion aus den Nullstellen des Klammerterms:



$0 = 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2.$

Mit der Lösungsformel erhält man $x_2 = 2$ und $x_3 = -6$.

Auch bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades gibt es ein Gesetz über die Anzahl von Nullstellen:

Ganzrationale Funktionen dritten Grades haben mindestens eine und höchstens drei Nullstellen.

Beispielseite (Band 1)

2. Ganzrationale Funktionen
2.4 Nullstellen bei Funktionen 3. Grades

Übungsaufgaben

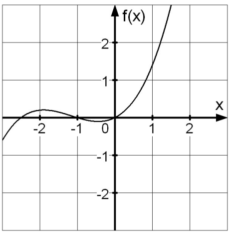
1. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen.

   $f_1(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}6x$ $\quad$ $f_2(x) = 0{,}25x^3 - x^2 + x$

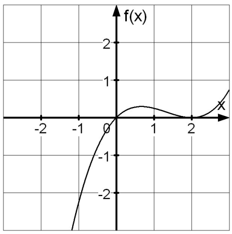
   $f_3(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{7}{10}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\quad$ $f_4(x) = x^3 + 4{,}5x^2 + 5{,}5x$

   $f_5(x) = x^3 + 2x^2$ $\quad$ $f_6(x) = x^3 - 4x$

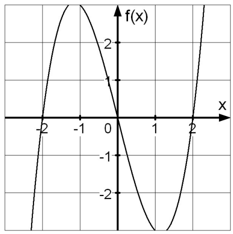
2. Ordnen Sie anhand der berechneten Nullstellen den Funktionen $f_1(x)$ bis $f_6(x)$ aus Aufgabe 1 die abgebildeten Graphen zu.



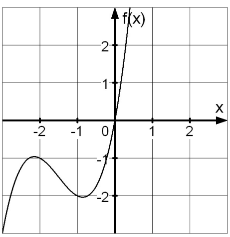
Graph 1



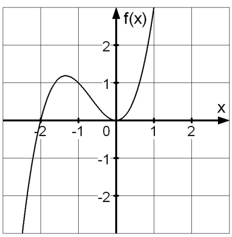
Graph 2



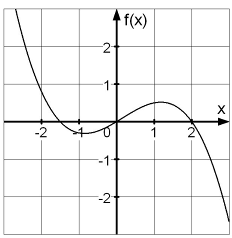
Graph 3



Graph 4



Graph 5



Graph 6

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
3.3 Stochastische Abhängigkeit

Was ist stochastische Abhängigkeit?

Wenn man zwei verschiedene Ereignisse A und B betrachtet, weiß man häufig, dass das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses beeinflusst.
Es besteht aber kein kausaler Zusammenhang zwischen A und B. Das heißt, dass aus dem Eintreten von A nicht zwangsläufig das Eintreten von B folgt.

Beispiel 1:

Vor einer Reise auf die Kanaren informiert man sich über das Wetter und erfährt, dass die Regenwahrscheinlichkeit im Winter höher ist als im Sommer. Offensichtlich beeinflusst das Eintreten des Winters (Ereignis A) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Regen (Ereignis B). Das bedeutet aber nicht, dass es im Winter immer regnet und der Sommer niederschlagsfrei ist. Es wird im Winter Tage ohne Regen geben und es wird verregnete Sommertage geben.

Beispiel 2:

Adipositas (starkes Übergewicht, Ereignis A) gilt als Risikofaktor für zahlreiche Erkrankungen, wie zum Beispiel Herzinsuffizienz (Herzmuskelschwäche, Ereignis B).
Aber Adipositas führt nicht in jedem Falle zu Herzinsuffizienz und Herzinsuffizienz kann nicht nur durch Adipositas verursacht werden.

Im Gegensatz dazu gibt es stochastisch <u>un</u>abhängige Ereignisse:

Beispiel 3:

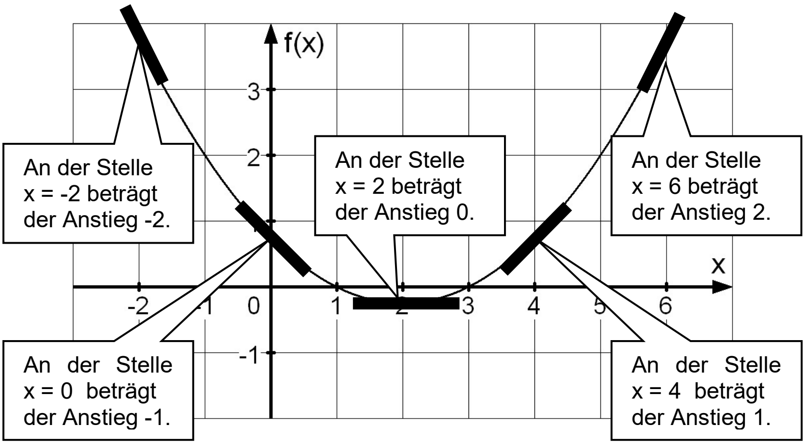
Der Ausgang des ersten Versuches beim Würfeln hat keinen Einfluss auf den zweiten Versuch. Eine Argumentation wie: "Jetzt muss doch endlich eine Sechs kommen" ist falsch.

Beispiel 4:

Wenn ein Mensch eine bestimmte Augenfarbe hat, wird die Wahrscheinlichkeit, mit der es sich um einen Linkshänder handelt, vermutlich nicht höher oder niedriger sein als bei anderen Menschen.

Die 1. Ableitung einer Funktion

Die Graphen ganzrationaler Funktionen haben in jedem Punkt einen eindeutig bestimmbaren Anstieg. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}25x^2 - x + 0{,}75$ und Tangenten an ausgewählten Stellen.



unterschiedliche Anstiege an ausgewählten Stellen des Graphen einer Funktion

Der Zusammenhang von x und dem Anstieg lässt sich mit Hilfe des Table-Menüs oder Grafik-Menüs (TRACE) in einer Tabelle darstellen.

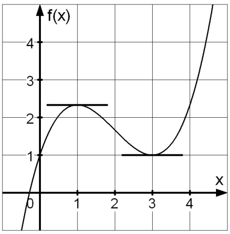
x	Anstieg
-2	-2
0	-1
2	0
4	1
6	2

Allerdings können in der Spalte für x nicht alle reellen Zahlen erfasst werden. Derartige Tabellen sind also in jedem Falle unvollständig. Deswegen nutzt man eine andere Methode, um jeder der unendlich vielen Stellen des Graphen einer ganzrationalen Funktion den Anstieg …

4. Differenzialrechnung an ganzrationalen Funktionen
4.12 Lokale Extremstellen

Die Berechnung lokaler Extremstellen

Diese Berechnung beruht auf der Untersuchung des Anstiegs. Offensichtlich verlaufen der Graph und die Tangente in den Hoch- und Tiefpunkten parallel zur x-Achse. Deswegen müssen die Anstiege der Tangenten und der Wert der ersten Ableitung null betragen. Diese Forderung bezeichnet man als notwendige Bedingung.

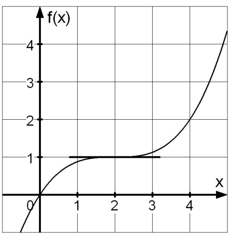


$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Der Anstieg des Graphen an den lokalen Extremstellen beträgt null. Die Tangenten verlaufen waagerecht.

notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extremstelle: $f'(x) = 0$

Allerdings kann der Graph der Funktion auch in Punkten waagerecht verlaufen, die nicht zu den lokalen Extrema gehören. Diese Punkte sind bereits unter dem Namen Terrassenpunkt bekannt.



$f(x) = 0{,}125x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x$

Die Tangente verläuft waagerecht, aber es gibt keine lokale Extremstelle, sondern einen Terrassenpunkt.

Zusammenfassung:

Bei der rechnerischen Suche nach lokalen Extremstellen müssen also die Lösungen der Gleichung $0 = f'(x)$ gefunden werden. Nur an diesen Stellen können sich lokale Extrema befinden. Allerdings können sich hinter den Lösungen auch Terrassenpunkte verbergen.

Beispielseite (Band 1)

4. Differenzialrechnung an ganzrationalen Funktionen
4.12 Lokale Extremstellen

1. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 7{,}5x^2 - 9x + 4$

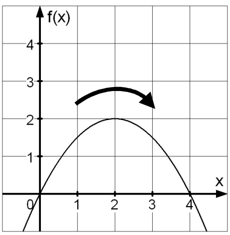
Die lokalen Extremstellen der Funktion sollen berechnet werden. Dazu muss die notwendige Bedingung untersucht werden:

$$0 = f'(x)$$
$$0 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

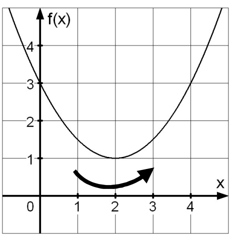
Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ (Equation-Menü). Jetzt wissen wir, dass an diesen Stellen lokale Extrema liegen können, an anderen Stellen nicht.

Wir wissen aber noch nicht, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Terrassenpunkt handelt.

Zur Beantwortung dieser Frage untersucht man die Krümmung des Graphen. Offensichtlich liegt bei einem lokalen Maximum ein rechtsgekrümmter Graph vor. Demzufolge muss die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ sein. Bei einem lokalen Minimum ist der Graph linksgekrümmt. Der Wert der zweiten Ableitung ist positiv.



Funktion mit lokalem Maximum:
Der Graph ist rechtsgekrümmt.
$f''(x) < 0$

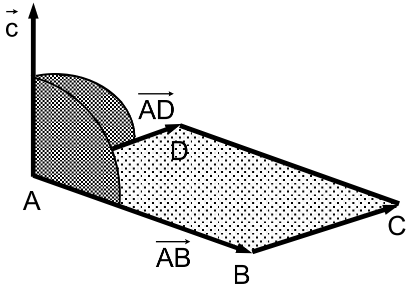


Funktion mit lokalem Minimum:
Der Graph ist linksgekrümmt.
$f''(x) > 0$

5. Vektorrechnung
5.5 Die Multiplikation von Vektoren

Anwendung des Vektorprodukts zur Flächenberechnung

Die Punkte A(5; 3; 8), B(6; 5; 8), C(8; 5; 11) und D sind Eckpunkte des Parallelogramms ABCD. Dessen Flächeninhalt soll berechnet werden.



Grafische Darstellung der Lösungsidee:

Aus den Koordinaten der Eckpunkte werden die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ (und damit auch $\overrightarrow{AD}$) gewonnen und das Vektorprodukt $\vec{c} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ gebildet.
Der Betrag des Vektorprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannten Rechtecks.

Berechnung von $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 5-3 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8-6 \\ 5-5 \\ 11-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Vektorprodukts:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 0\cdot 0 \\ 0\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 0 - 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags des Vektorproduktes:

$$|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{61}$$

Ergebnis:

$$A = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \text{ FE}$$

Übungsaufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des auf Seite 51 in Aufgabe 4 dargestellten Parallelogramms.

8. Extremwertaufgaben
8.2 Extreme Flächeninhalte

Zusammenfassung: Die in den Beispielen gezeigte Schrittfolge wird für die Lösung weiterer Extremwertaufgaben empfohlen.

Schrittfolge zur Lösung von Extremwertproblemen

1. Skizzieren des Sachverhalts

   gegebene und gesuchte Größen kennzeichnen

2. Zielfunktion angeben

   Formelsammlung nutzen, vorerst sind mehrere Unbekannte möglich

3. Nebenbedingungen suchen

   Beziehungen zwischen den Unbekannten in Gleichungsform bringen und nach einer Unbekannten auflösen

4. Nebenbedingungen in die Zielfunktion einsetzen

   Die Zielfunktion darf danach nur noch von einer einzigen Unbekannten abhängig sein.

5. Zielfunktion vereinfachen

6. lokale Extremstellen der Zielfunktion suchen

   je nach Aufgabenstellung mit Grafik-Menü oder durch Differenzialrechnung, vorgegebene Intervalle beachten

7. Funktionswert des Extremums ermitteln

   Extremstelle in die Zielfunktion einsetzen, Table-Menü nutzen

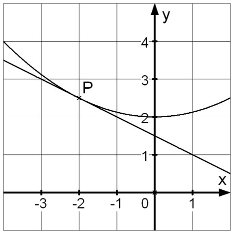
8. Randwerte berechnen und mit dem Funktionswert des Extremums vergleichen

   Die Randwerte müssen kleiner als das lokale Maximum bzw. größer als das lokale Minimum der Zielfunktion sein.

9. Ergebnis kennzeichnen, gegebenenfalls interpretieren

   Aufgabenstellung beachten

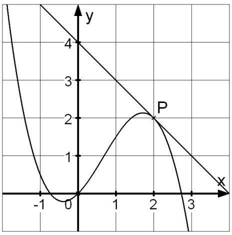
Seite 83



1. P(-2; 2,5)

Tangentengleichung: y = -0,5x + 1,5

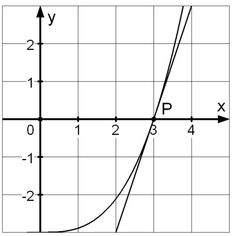
2.



P(2; 2)

Tangentengleichung: y = -x + 4

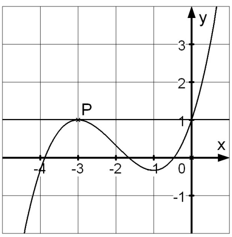
3.



P(3; 0)

Tangentengleichung: y = 3x - 9

4.



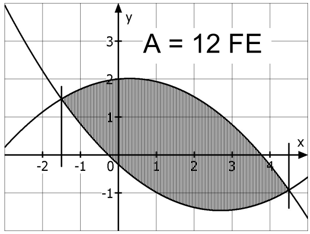
P(-3; 1)

Tangentengleichung: y = 1

Seite 84

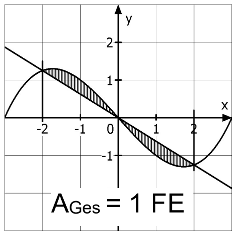
3. $$A = \int_{-1,5}^{4,5} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_{-1,5}^{4,5} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + 2{,}25\right)dx$$



4. $$A_1 = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{8}x^3 - 0{,}5x\right)dx = 0{,}5 \text{ FE}$$



$$A_2 = \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left(-\frac{1}{8}x^3 + 0{,}5x\right)dx = 0{,}5 \text{ FE}$$

5. $$A_1 = \int_{-5,19}^{0,19} (g(x) - f(x))\,dx \approx 39{,}04 \text{ FE}$$

$$A_2 = \int_{0,19}^{5,00} (f(x) - g(x))\,dx \approx 28{,}85 \text{ FE}$$